（7）二重積分への拡張

積分領域が長方形や直方体であるような二重積分や三重積分に拡張することができます。たとえば二重積分の式

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(u,v)dudv \cong \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} C_i C_j f(t_i, t_j)$$

に対して，

$$V = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)dxdy$$

を考えます。積分区間が $t \in [-1,1]$ になるように変換するには，

$$x = \frac{b-a}{2}(u+1)+a \qquad dx = \frac{b-a}{2}du$$

$$y = \frac{d-c}{2}(v+1)+c \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{d-c}{2}dv$$

とします。そうすると，

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(u,v)\frac{(b-a)(d-c)}{4}dudv$$

$$\cong \frac{(b-a)(d-c)}{4}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} C_i C_j g(u_i, v_j)$$

$$g(u,v) = f\left(\frac{b-a}{2}(u+1)+a, \frac{d-c}{2}(v+1)+c\right)$$

として積分することができます。同様に，三重積分にも拡張することができます。

［演習］

次の積分について，台形の公式，シンプソンの公式，ガウスの積分で数値積分を行うプログラムを作成せよ。ただし，台形の公式，シンプソンの公式における分割数は 20，ガウスの積分における次数は 3 とする。

$$S = \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$$

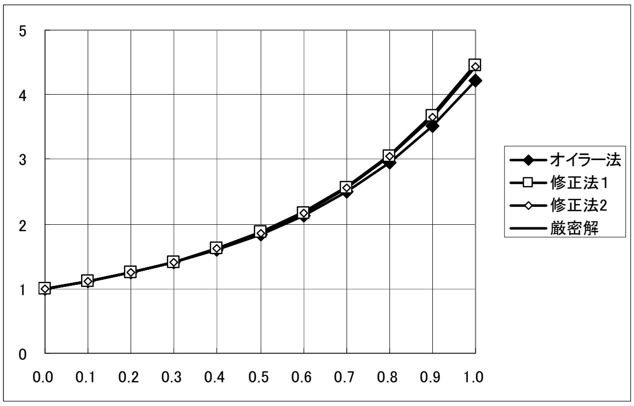

図 8-12　VBA による結果（オイラー法と修正オイラー法）

(e)修正オイラー法の一般化

以下の係数に適当な値を代入することを考えます。

$$k_1 = g(t,y)\Delta t$$
$$k_2 = g(t+\alpha\cdot\Delta t, y+\beta\cdot k_1)\Delta t$$
$$y(t+\Delta t) = y(t) + (c_1k_1 + c_2k_2)$$

k_2をテーラ展開すると

$$k_2 = g(t+\alpha\cdot\Delta t, y+\beta\cdot k_1)\Delta t = g(t,y) + \alpha\cdot\Delta t\frac{dg}{dt} + \beta\cdot k_1\frac{dg}{dy} + O(\Delta t^2, y^2)$$

$$= g(t,y) + \alpha\cdot\Delta t\frac{dg}{dt} + \beta\cdot g(t,y)\Delta t\frac{dg}{dy} + O(\Delta t^2, y^2)$$

これを第 3 式に代入すると

$$y(t+\Delta t) = y(t) + (c_1k_1 + c_2k_2)$$

$$= y(t) + c_1\Delta t\cdot g(t,y) + c_2\Delta t\left\{g(t,y) + \alpha\cdot\Delta t\frac{dg}{dt} + \beta\cdot g(t,y)\Delta t\frac{dg}{dy} + O(\Delta t^2)\right\}$$

$$= y(t) + (c_1+c_2)\Delta t\cdot g(t,y) + \alpha\cdot c_2\Delta t^2\frac{dg}{dt} + \beta\cdot g(t,y)c_2\Delta t^2\frac{dg}{dy} + O(\Delta t^3)$$

テーラ展開の式と比較すると$(c_1+c_2)=1$,　$\alpha\cdot c_2 = 1/2$,　$\beta\cdot c_2 = 1/2$ となります。修正法 1，2 は，これらの特別な場合と考えることができます。

修正法 1：　$c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$,　$\alpha = \beta = 1$

修正法 2：　$c_1 = 0$,　$c_2 = 1$,　$\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$

$$k_1 = g(t_j, x_j), \quad k_2 = g(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = g(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = g(t_j + h, x_j + hk_3)$$

$$x_{j+1} = x_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

この式をルンゲ・クッタの式といいます。

(d)ルンゲ･クッタ･ギルの公式（Runge−Kutta−Gill method）

4 次のルンゲ･クッタ型の公式の一つとして, 次の公式があります。

$$k_1 = g(t_j, x_j)$$

$$k_2 = g\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = g\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2\right)$$

$$k_4 = g\left(t_j + h, x_j - \frac{1}{\sqrt{2}}hk_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_3\right)$$

$$x_{j+1} = x_j + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3 + k_4\right)$$

［ちょっと一息］ −− ルンゲとクッタ −−

カール・ルンゲ(Runge,Carl David Tolme：1856～1927)もウイルヘルム・クッタ(Wilhelm Kutta：1867～1944)もドイツの数学者でかつ物理学者です。クッタは，渦による揚力の発生クッタ-ジェコフスキーの揚力理論で有名です。

(d)テーラ展開による方法

■考え方

微分を求めることができる場合，微分方程式から高次の微分を求めテーラ展開の式に代入することで，精度の良い展開式を導くことができることもあります。

たとえば $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-x$ とすると，$x^{(2)}=-x,\quad x^{(3)}=-x^{(1)},\quad x^{(4)}=x,$ 等となり $x^{(2n)}=(-1)^n x,\quad x^{(2n+1)}=(-1)^n x^{(1)}$ となりますので，テーラ展開の式に代入すると，

$$x(t+h)=x(t)\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\frac{h^6}{6!}\cdots\right)+x^{(1)}(t)\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\frac{h^7}{7!}\cdots\right)$$
$$=x(t)\cos(h)+x^{(1)}(t)\sin(h)$$

となります。同様に，$x^{(1)}(t+h)=x^{(1)}\cos(h)-x(t)\sin(h)$ となりますので，読者で確認してみましょう。この式を展開式として用います。

■Excel による定義

以下のように定義します。図 8-18 に示すように厳密解に近い結果を得ることができます。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	X	x(1)			Δt	厳密解	誤差
2	0	0	4			0.1	=4*SIN(A2)	=B2-G2
3	=A2+$F$2	=B2*COS(F$2)+C2*SIN(F$2)	=C2*COS(F$2)-B2*SIN(F$2)				=4*SIN(A3)	=B3-G3
4	=A3+$F$2	=B3*COS(F$2)+C3*SIN(F$2)	=C3*COS(F$2)-B3*SIN(F$2)				=4*SIN(A4)	=B4-G4
5	=A4+$F$2	=B4*COS(F$2)+C4*SIN(F$2)	=C4*COS(F$2)-B4*SIN(F$2)				=4*SIN(A5)	=B5-G5
6	=A5+$F$2	=B5*COS(F$2)+C5*SIN(F$2)	=C5*COS(F$2)-B5*SIN(F$2)				=4*SIN(A6)	=B6-G6
7	=A6+$F$2	=B6*COS(F$2)+C6*SIN(F$2)	=C6*COS(F$2)-B6*SIN(F$2)				=4*SIN(A7)	=B7-G7
8	=A7+$F$2	=B7*COS(F$2)+C7*SIN(F$2)	=C7*COS(F$2)-B7*SIN(F$2)				=4*SIN(A8)	=B8-G8
9	=A8+$F$2	=B8*COS(F$2)+C8*SIN(F$2)	=C8*COS(F$2)-B8*SIN(F$2)				=4*SIN(A9)	=B9-G9
10	=A9+$F$2	=B9*COS(F$2)+C9*SIN(F$2)	=C9*COS(F$2)-B9*SIN(F$2)				=4*SIN(A10)	=B10-G10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	X	x(1)			Δt	厳密解	誤差
2	0.0	0.0000	4.0000			0.1	0.0000	0.0000
3	0.1	0.3993	3.9800				0.3993	0.0000
4	0.2	0.7947	3.9203				0.7947	0.0000
5	0.3	1.1821	3.8213				1.1821	0.0000
6	0.4	1.5577	3.6842				1.5577	0.0000
7	0.5	1.9177	3.5103				1.9177	0.0000
8	0.6	2.2586	3.3013				2.2586	0.0000
9	0.7	2.5769	3.0594				2.5769	0.0000

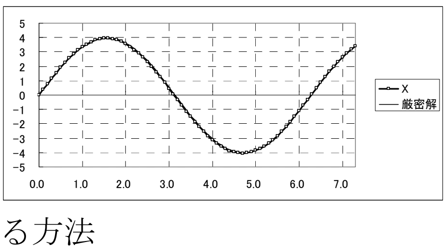

図 8-18　テーラ展開による方法