数学公式集

代　数

級数の和

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad 1+r+r^2+\cdots\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

順列

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

組合せ

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdot r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

式の展開

$$a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+c, \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)+y^2, \qquad (ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3, \qquad (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca), \qquad (a\pm b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k a^{n-k}b^k$$

二次方程式の解の公式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \to x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

三角関数　　以下 j は虚数単位　　$(j^2=-1)$

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin A \qquad \cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$$

$$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B} \qquad e^{jA}=\cos A+j\sin A$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \sin A-\sin B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \cos A-\cos B=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin 2A=2\sin A\cos A \qquad \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A \qquad \cos 3A=4\cos^3 A-3coA$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)} \qquad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)}$$

平面三角公式

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin c, \quad a=b\cos C+c\cos B, \quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$2s=a+b+c$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

複素数関数

以下 j は虚数単位　　$(j^2 = -1)$

加算　：$(a_1 + b_1 j) + (a_2 + b_2 j) = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_1)$

減算　：$(a_1 + b_1 j) - (a_2 + b_2 j) = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$

絶対値　：$|a + b\,j| = \sqrt{a^2 + b^2}$

乗算　：$(a_1 + b_1 j) \cdot (a_2 + b_2 j) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (a_1 b_2 + b_1 a_2)$

虚数の指数　：$e^{\theta j} = \cos\theta + j \sin\theta$

複素数の指数　：$e^{R+\theta j} = e^R \cdot e^{\theta j} = e^R \cos\theta + j \cdot e^R \sin\theta$

逆数　：$\dfrac{1}{a+bj} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - j \cdot \dfrac{b}{a^2+b^2}$

除算　：除数の逆数を求めておいて被除数との乗算を行う。

平方根　：$\sqrt{a+bj} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + j \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$

対数　：$\log(a+bj) = \log\sqrt{a^2+b^2} + j \cdot \mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

虚数の三角関数　：

$$\cos\,(bj) = \frac{e^b + e^{-b}}{2} \qquad (= \cosh b)$$

$$\sin\,(bj) = \frac{e^{-b} - e^b}{2j} = j \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} \qquad (= j \cdot \sinh b)$$

$$\tan(bj) = \frac{\sin(bj)}{\cos(bj)} = j \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \qquad (= j \cdot \tanh b)$$

複素数の三角関数　：

$$\sin(a+bj) = \sin a \cosh b + j \cdot \cos a \sinh b$$

$$\cos(a+bj) = \cos a \cosh b - j \cdot \sin a \sinh b$$

$$\tan(a+bj) = \frac{\tan a(1-\tanh^2 b)}{1+\tan^2 a \tanh^2 b} + j \cdot \frac{\tanh b(\tan^2 a + 1)}{1+\tan^2 a \tanh^2 b}$$

$\mathrm{Tan}^{-1}(a+bj) = A + Bj$ として

$$A = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{(a^2+b^2-1) + \sqrt{(a^2+b^2-1)^2 + 4a^2}}{2a}, \quad B = \frac{1}{2} \log \frac{a \tan A + b + 1}{a \tan A - b + 1}$$

ただし $a \tan A - b + 1 \to 0$ のとき $B \to \infty$, $a \tan A + b + 1 \to 0$ のとき $B \to -\infty$

微　分

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \quad \frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{df(u/v)}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x, \quad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a, \quad , \quad \frac{d(x^x)}{dx} = x^x(1+\log x),$$

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d(\log_{10} x)}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_{10} e,$$

（ $\sqrt{x} \to x^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1}{x} \to x^{-1}$ とみなす）

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x,\quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,\quad \frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d(\mathrm{Sin}^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d(\mathrm{Cos}^{-1} x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d(\tan^{-1} x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},$$

なお, $\mathrm{Sin}^{-1} x$, $\mathrm{Cos}^{-1} x$ は, それぞれ $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ の主値である。

不定積分 （以下，積分定数省略）

$$\int uv\,dx = u\int v dx - \int \frac{du}{dx}\int v\,dx dx$$ （部分積分公式）， $$\int a\,dx = ax,\quad \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{a}{x}dx = a\log x,\quad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax},\quad \int xe^{ax}dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a^2},\quad \int a^{bx}dx = \frac{a^{bx}}{b\log a}$$

$$(a \neq b) \to \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|,\quad (a = b) \to \int \frac{dx}{(x-a)^2}dx = -\frac{1}{x-b}$$

$$(a \neq b) \to \int \frac{x\cdot dx}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{a\log|x-a| - b\log|x-a|}{a-b}$$

$$(a = b) \to \int \frac{x\cdot dx}{(x-a)^2}dx = -\frac{x}{x-a} + \log|x-a|$$

$$\int \log ax\,dx = x\log ax - x,\quad \int x^n \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}\log^2 x,\quad \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax,\quad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax,$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\log(\cos ax),\quad \int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\log(\sin ax)$$

$$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right) = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{1+\sin ax}{1-\sin ax}\right)$$

$$\int \mathrm{cosec}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\log\left(\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2a}\log\left(\frac{1+\cos ax}{1-\cos ax}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+A}\right|,$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|}\right)$$

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x + \sqrt{x^2+A}\right|\right)$$

$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ とおいて $I_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1} x \quad (a \neq 0)$ とし，

漸化式 $I_n = \frac{1}{2(n-1)\cdot a^2}\left\{\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)\cdot I_{n-1}\right\}$ によって求める。

$$\int \frac{x \cdot dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

定積分　以下 m, n は正の整数または 0。また，自然数 n に対し，n が奇数なら 1 から n までの奇数の総乗，n が偶数なら 2 から n までの偶数の総乗を示す 2 重階乗を $n!!$ で示す。なお一般に n 重階乗の場合，

$$m!n = m \times (m-n) \times (m-2n) \times (m-3n) \cdots\cdots \times k \quad (\ k-n \le 0\ のとき (k-n)! = 1\ )$$

たとえば，$m!! = m \times (m-2) \times (m-4) \times (m-6) \cdots\cdots \times k \quad (k = 1\ or\ 2 \to 0!! = 1, (-1)!! = 1)$

また，見やすさに配慮して e^x を $\exp(x)$ の形式で表記することがある。

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \to \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(g(t))\frac{dg(t)}{dt}dt$$

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \left[f(x)\cdot G(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot G(x)dx \qquad (G = \int g(x)dx)$$

$$\int_0^1 x(1-x)^{a-1}dx = \frac{1}{a(a+1)} \quad (a>0), \quad \int_0^1 x^m(1-x^2)^n\,dx = \frac{(m-1)!!(2n)!}{(m+2n+1)!!}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(ax^2+b)^n} = \frac{\pi}{2b^n}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \quad (a, b>0)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi\,\mathrm{cosec}(b\pi/2)}{2a^{2-b}} \quad (0<b<2,\ a>0)$$

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{\pi}{8}(b-a)^a \quad (b>a), \quad \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{\pi}{8}(b-a)^a \quad (b>a)$$

$$\int_0^\infty x^n \exp(-ax)dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a>0), \quad \int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2)dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}} \quad (a>0)$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\exp(-ax^2)dx = \frac{n!!}{2a^{n+1}} \quad (a>0), \quad \int_0^\infty \exp(-ax^2)\cdot\log x dx = \frac{-(\gamma+\log a)}{a} \quad (a>0)$$

（ γ ：オイラーの定数）

$$\int_0^\infty \exp(-a^2x^2)\cos bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a^2}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) \quad (a>0)$$

(m, n ともに偶数のとき)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\cdot\sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}$$

(m, n のいずれかが奇数のとき)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\cdot\sin^n x\,dx = \frac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cdot\cos nx\,dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cdot\sin nx\,dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}\sum_{r=1}^{n}\frac{2^r}{r}$$

$$\int_0^\infty \exp(-ax)\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \quad (a>0), \quad \int_0^\infty \exp(-ax)\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2} \quad (a>0),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\cos x} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & (a=b>0) \\ \dfrac{-1}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{a} & (a>b>0) \\ \dfrac{-1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\dfrac{a}{b+\sqrt{b^2-a^2}} & (b>a>0) \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{a+b\cos x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^n \quad (a>b>0,\ n>0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x \pm a\cos x}dx = \frac{a}{a^2+1}\left(\frac{\pi}{2a} \pm \log a\right) \quad (a>0)$$

複号±のうちマイナス(−)の場合，主値とする。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2} = \frac{1}{ab} \quad (ab>0), \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2} \quad (a>0)$$

$$\int_0^{\infty} \cos(a^2x^2)\,dx = \int_0^{\infty} \sin(a^2x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8a^2}} \quad (a>0)$$

関数の級数展開

（テーラ級数） $$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x) + \cdots\cdots$$

（マクローリン級数） $$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \cdots\cdots$$

（フーリエ級数）

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{t} + b_n \sin\frac{n\pi x}{t}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{t}\int_{-t}^{+t} f(x)\cos\frac{n\pi x}{t}dx, \quad b_n = \frac{1}{t}\int_{-t}^{+t} f(x)\sin\frac{n\pi x}{t}dx$$

（複素フーリエ級数） $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n \exp\left(\frac{jn\pi x}{t}\right)\right), \quad c_n = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{+t} f(x)\exp\left(\frac{jn\pi x}{t}\right)dx$$

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots & (|x|<1,\ n\neq 0) \\ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots\cdots & (|x|<1,\ n=+1) \\ 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\cdots & (|x|<1,\ n=-1) \end{cases}$$

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots\cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots\cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\cdots$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315!}x^7 + \cdots + \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_k x^{2k-1} + \cdots\cdots$$

（ただし，$|x| < \frac{\pi}{2}$，B_k はベルヌーイ数）

（連分数展開，$x \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ ）

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - x^2/(3 - x^2/(5 - x^2/(7 - x^2/(9 - \cdots\cdots))))}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \cdots\cdots \qquad (|x| \le 1,\ \ x \neq -1)$$

$$\mathrm{Sin}^{-1} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\cdots \qquad (|x| \le 1,\ \ x \neq \pm 1)$$

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\cdots \qquad (|x| \le 1,\ \ x \neq \pm j)$$

（第 1 種完全楕円積分 ｜k｜< 1 ）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - d^2 \sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 d^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 d^4 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\right)^2 d^6 + \cdots + \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2 d^{2k} + \cdots\cdots\right]$$

（第 2 種完全楕円積分 ｜k｜< 1 ）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - d^2 \sin^2\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 d^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{d^4}{3} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\right)^2 \frac{d^6}{5} - \cdots - \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2 \frac{d^{2k}}{2k-1} - \cdots\cdots\right]$$

微分演算子

$$D \cdot y = \frac{dy}{dx}, \quad D^n \cdot y = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{1}{D}\cdot y = \int y\,dx,, \quad \frac{1}{D^n}\cdot y = \overbrace{\iint\cdots\int}^{n} y\, \overbrace{dx\cdots dx\,dx}^{n}$$

$$G(D)y = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + D\,y + y = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y$$

$$G(D)e^{px} = G(p), \quad G(D)(e^{px} f(x)) = e^{px} G(p+D) f(x)$$

$$\frac{1}{1+G(D)} = 1 - G(D) + (G(D))^2 - (G(D))^3 + \cdots + (-1)^k (G(D))^k + \cdots\cdots$$

各種関数

デルタ関数　$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$

ガンマ関数　$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{n-1}dx$　　n が正の整数のとき $\Gamma(n)=(n-1)!$

ベータ関数　$B(n,m)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{n+m}}dx$　左辺は第 1 種オイラーの積分

$$B(n,m)=B(m,n) \quad B(n,m)=\frac{m-1}{n+m-1}B(n,m-1)$$

$$B(a,b)=\frac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}$$　（ a,b が共に正の整数のとき）

$$B(n,\ m)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+m)}$$　（Γ 関数との関係）

（ $n+m=1$ のとき）　$B(n,1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$

パイ関数　$\Pi(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{m^x}{\prod_{t=1}^{m}\left(1+\frac{x}{t}\right)}=\lim_{m\to\infty}\frac{m!\,m^x}{(1+x)(2+x)(3+x)\cdots\cdots(m+x)}$

$$(r+1>0)\to\Pi(r)=\Gamma(r+1), \qquad (r>0)\to\Pi(r-1)=\Gamma(r)$$

$$\Gamma(r)=\frac{\Pi(r)}{r}, \quad \Pi(1+r)=(1+r)\Pi(r), \quad \Pi(r)\Pi(-r)=\frac{\pi r}{\sin\pi r}$$

誤差関数　$G_e(x)=\int_0^x\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx$　（ $G_e=\mathrm{erf}=\mathrm{erfc}$ と書くこともある）

ベッセル関数　（n 次第 1 種）　$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$

（0 次のノイマンの第 2 種ベッセル関数）　$Y_0(x)=J_0(x)\log x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2 4^2}(1+\frac{1}{2})+\cdots$

（0 次のウェーバの第 2 種ベッセル関数）　$Y_{N0}(x)=\frac{2}{\pi}\left(Y_0(x)-(\log 2-\gamma)J_0(x)\right)$

（ただし，γ はオイラーの定数）

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.5772\,15664\,901253\,28606\cdots$$

（m 次の第 1 種ベッセル関数）

$$J_m(x)=\frac{x^m}{2^m m!}\left\{1-\frac{x^2}{(m+1)\cdot 1!\cdot 2^2}+\frac{x^4}{(m+1)(m+2)\cdot 2!\cdot 2^4}\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{(m+1)(m+3)(m+4)\cdot 2!\cdot 2^6}\cdots\right\}$$

（m 次の第 2 種ベッセル関数）

$$Y_m(x)=\frac{2}{\pi}\left(p+\log\frac{x}{2}\right)J_m(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{m-p-1}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2p}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(m+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2p}\{g(p)+g(m+p)\}$$

ハンケル関数　以下 j は虚数単位。すなわち，$j=\sqrt{-1}$ である。

（第 1 関数）$H_m^{(1)}(x)=J_m(x)+jY_m(x)$　（第 2 関数）$H_m^{(2)}(x)=J_m(x)-jY_m(x)$

$$H_{-m}^{(1)}(x)=e^{jm\pi}H_m^{(1)}\quad H_{-m}^{(2)}(x)=e^{-jm\pi}H_m^{(1)}$$

$$J_m(x)=\frac{1}{2}\left(H_m^{(1)}(x)+H_m^{(2)}(x)\right)\quad Y_m(x)=\frac{1}{2j}\left(H_m^{(1)}(x)-H_m^{(2)}(x)\right)$$

ラゲール関数　$L_m(x)=e^x\dfrac{d^m(x^me^{-x})}{dx^m}$

エルミート関数　$L_m(x)=(-1)^m e^{x^2}\dfrac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$

楕円関数 $g=\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1-d^2x^2)}}$ のとき, d をパラメータ, x を g の関数とみなして,

$x=\mathrm{sn}(g,\,d)g=\mathrm{sn}\ g$ と表現し，これを sn 関数という。

$$\mathrm{cn}\ g=\mathrm{cn}(g,\,d)=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\ g}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\mathrm{dn}\ g=\mathrm{dn}(g,\,d)=\sqrt{1-d^2\,\mathrm{sn}^2\ g}=\sqrt{1-d^2x^2}$$

（偶奇性）$\mathrm{sn}(-g,\,d)=-\mathrm{sn}(g,\,d),\quad \mathrm{cn}(-g,\,d)=\mathrm{cn}(g,\,d),\quad \mathrm{dn}(-g,\,d)=\mathrm{dn}(g,\,d),$

（$D=D(d)=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1-d^2x^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-d^2\sin^2\varphi)}}$ のとき）

$$\mathrm{sn}(0,d)=0,\quad \mathrm{cn}(0,d)=\mathrm{dn}(0,d)=1,\quad \mathrm{sn}(D,d)=1,\quad \mathrm{cn}(D,d)=0,$$

$\mathrm{dn}(D,d)=\sqrt{1-d^2}=d',\quad d^2+d'^2=1$　（d を母数, d' を補母数という）

$$\frac{d}{dg}\mathrm{sn}(g,d)=\mathrm{cn}(g,d)\cdot\mathrm{dn}(g,d),\qquad \frac{d}{dg}\mathrm{cn}(g,d)=-\mathrm{sn}(g,d)\cdot\mathrm{dn}(g,d),$$

$$\frac{d}{dg}\mathrm{dn}(g,d)=-d^2\,\mathrm{sn}(g,d)\cdot\mathrm{dn}(g,d)$$

$$\mathrm{sn}\ (g+h)=\frac{\mathrm{sn}\ g\cdot\mathrm{cn}\ h\cdot\mathrm{dn}\ h+\mathrm{sn}\ h\cdot\mathrm{cn}\ g\cdot\mathrm{dn}\ g}{1-d^2\cdot\mathrm{sn}^2\ g\cdot\mathrm{sn}^2\ g}$$

$$\mathrm{cn}\ (g+h)=\frac{\mathrm{cn}\ g\cdot\mathrm{cn}\ h-\cdot\mathrm{dn}\ h-\mathrm{sn}\ g\cdot\mathrm{sn}\ h\cdot\mathrm{dn}\ g\cdot\mathrm{dn}\ h}{1-d^2\cdot\mathrm{sn}^2\ g\cdot\mathrm{sn}^2\ g}$$

$$\mathrm{dn}\ (g+h)=\frac{\mathrm{cn}\ g\cdot\mathrm{cn}\ h-\cdot\mathrm{dn}\ h-\mathrm{sn}\ g\cdot\mathrm{sn}\ h\cdot\mathrm{dn}\ g\cdot\mathrm{dn}\ h}{1-d^2\cdot\mathrm{sn}^2\ g\cdot\mathrm{sn}^2\ g}$$

$$\mathrm{sn}\ 2D=0,\quad \mathrm{cn}\ 2D=-1,\quad \mathrm{dn}\ 2D=0,\quad \mathrm{sn}(g+2D)=-\mathrm{sn}\ g,\quad \mathrm{sn}(g+4D)=\mathrm{sn}\ g$$

$$\mathrm{cn}(g+2D)=-\mathrm{cn}\ g,\quad \mathrm{cn}(g+4D)=\mathrm{cn}\ g,\quad \mathrm{dncn}(g+2D)=\mathrm{dn}\ g,\quad \mathrm{dn}(g+4D)=\mathrm{dn}\ g$$

$$\mathrm{sn}(jg,d)=j\frac{\mathrm{sn}(g,d')}{\mathrm{cn}(g,d')},\quad \mathrm{cn}(jg,d)=j\frac{1}{\mathrm{cn}(g,d')},\quad \mathrm{dn}(jg,d)=j\frac{\mathrm{dn}(g,d')}{\mathrm{cn}(g,d')}$$

$D'=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1-d'^2x^2)}}$ とおいて

$$\mathrm{sn}(g+j2D',d)=\mathrm{sn}(g,d),\quad \mathrm{cn}(g+j2D',d)=-\mathrm{cn}(g,d),\quad \mathrm{cn}(g+j2D',d)=-\mathrm{cn}(g,d)$$

ヘビサイド単位関数　$(t<0)\ \rightarrow E(t)=0,\quad (t=0)\ \rightarrow E(t)=\frac{1}{2},\quad (t>0)\ \rightarrow E(t)=1$

ルジャンドル関数

（第 1 種ルジャンドル関数／帯球関数）　$P_m(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2^m r!\cdot(n-2r)!\cdot(n-r)!}x^{m-2r}$

ただし，n は m が偶数のとき $n/2$，奇数のとき$(n-1)/2$

（第 2 種ルジャンドル関数／帯球関数）

$$(x^2>1)\quad\rightarrow\quad Q_m(x)=(-1)^m\frac{2^m m!}{(2m!)}\cdot\frac{d^m}{2dx^m}\left\{(x^2-1)^m\int_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)^{m+1}}\right\}$$

$$(x^2<1)\quad\rightarrow\quad Q_m(x)=(-1)^m\frac{2^m m!}{(2m!)}\cdot\frac{d^m}{2dx^m}\left\{(1-x^2)^m\int_0^x\frac{dx}{(1-x^2)^{m+1}}\right\}$$

（計算例）　$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_0(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\quad P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2},$

$$P_4(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{4}x^4-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4},\quad\cdots$$

$$(x^2>1)\quad\rightarrow\quad Q_0(x)=\coth^{-1}x,\quad Q_1(x)=x\cdot\coth^{-1}x,\quad\cdots$$

$$(x^2<1)\quad\rightarrow\quad Q_0(x)=\tanh^{-1}x,\quad Q_1(x)=x\cdot\tanh^{-1}x,\quad\cdots$$

（ルジャンドル関数を係数とした無限級数の合計）

$$(|r|>1)\quad\rightarrow\quad \sum_{m=0}^{\infty}r^m P_m(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}$$

（ロドリグの公式）　$P_m(x)=\frac{1}{2^m\cdot m!}\cdot\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2-1\right)^2$

（$P_m(x)$の漸化式）　$(a)\quad P'_{m+1}(x)-xP'_m(x)=(m+1)P_m(x)$

$$(b)\quad (m+1)P_{m+1}(x)-(2m+1)xP_m(x)+mP_{m+1}=0$$

$$(c)\quad P'_{m+1}(x)-xP'_{m-1}(x)=(2m+1)P_m(x)$$

$$(d)\quad xP'_m(x)-xP_m(x)=P'_{m-1}(x)$$

$$(e)\quad (1-x^2)P'_m(x)-mxP_m(x)=mP'_{m-1}(x)$$

（その他の性質）　$P_m(-x)=(-1)^m P_m(x),\quad P_{2m+1}(0)=0,\quad P_m(1)=1,\quad P_m(-1)=(-1)^m$

$$P_{2m}(0)=(-1)^m\cdot\frac{1\times3\times5\times\cdots\cdots\times(2m-1)}{2\times4\times6\times\cdots\cdots\times2m}$$

（シュレーフリ形積分表示）z：複素数，　m：正整数に限定しない

$$P_m(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_L\frac{(r^2-1)^m}{2m(r-z)^{m+1}}dr$$

ルジャンドル陪関数　　　　（第 1 種）　　　　　　　　（第 2 種）

$$P_m^r(x)=(1-x^2)^{\frac{r}{2}}\frac{d^rP_m}{dx^r},\qquad Q_m^r(x)=(1-x^2)^{\frac{r}{2}}\frac{d^rQ_m}{dx^r}$$

（性質）$(m-r)$ が奇数のとき　$P_m^r(0)=0$

$(m-r)$ が偶数のとき　$P_m^r(0)=(-1)^{\frac{m-r}{2}}\dfrac{(m+r-1)!}{2^{\frac{m-r}{2}}\left(\dfrac{m-r}{2}\right)!}$

$$P_m^{-r}(x)=(1-x^2)^{-\frac{r}{2}}\overbrace{\int_x^1\int_x^1\cdots\int_x^1}^{r}P_m(x)\overbrace{dx\cdots dxdx}^{r}$$

$$Q_m^{-r}(x)=(1-x^2)^{-\frac{r}{2}}\overbrace{\int_x^1\int_x^1\cdots\int_x^1}^{r}Q_m(x)\overbrace{dx\cdots dxdx}^{r}$$

（積分）　$(r<m)\quad\to\quad\int_{-1}^1x^rP_m(x)dx=0,\qquad\int_{-1}^1x^mP_m(x)dx=\dfrac{m!}{(2m+1)!}$

$(r\neq m)\quad\to\quad\int_{-1}^1P_r(x)\cdot P_m(x)dx=0,\qquad\int_{-1}^1\left(P_m(x)\right)^2dx=\dfrac{2}{(2m+1)!}$

$\int_0^{2\pi}\sin r\theta P_m(\cos\theta)d\theta=0,\qquad(m\neq n)\quad\to\quad\int_{-1}^1P_m^r(x)P_n^r(x)dx=0$

$$\int_{-1}^1(P_m^r(x))^2dx=\frac{2(m+r)!}{(m-r)!\cdot(2m+1)!}$$

（閉区間［－1，1］において $P_m(x)$で級数展開可能な関数 $g(x)$が存在するとき）

$$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}K_mP_m(x)\quad\to\quad K_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^1g(x)P_m(x)dx$$

$g(x)$が偶関数のとき $m=2r$ とおいて　$K_{2r}=(4r+1)\int_0^1g(x)P_{2r}(x)dx$

$g(x)$が奇関数のとき $m=2r+1$ とおいて　$K_{2r+1}=(4r+3)\int_0^1g(x)P_{2r+1}(x)dx$

ここで，$(r=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$ である。