記号法による強制振動の微分方程式の解法

まず，微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\mu\dfrac{dx}{dt}+\omega^2x=A_0\cos\omega_F t$

を微分演算子を用いて表すことにします。また, 右辺は Cos 関数ですから, を $A_0e^{j\omega_F t}$ とおいて実数部を解とすればかまいません。したがって,

$$(D^2+2\mu D+\omega^2)x=A_0e^{j\omega_F t}\quad\to x=\frac{1}{(D^2+2\mu D+\omega^2)}A_0e^{j\omega_F t}$$

とします。公式から，$\dfrac{1}{G(D)}e^{pt}=\dfrac{1}{G(p)}e^{pt}$ ですので,

$$\begin{aligned}x&=\frac{1}{(j\omega_F)^2+2\mu(j\omega_F)+\omega^2}A_0e^{j\omega_F t}=\frac{1}{(\omega^2-\omega_F^2)+2\mu\omega_F\cdot j}A_0e^{j\omega_F t}\\&=\frac{(\omega^2-\omega_F^2)-2\mu\omega_F\cdot j}{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}A_0e^{j\omega_F t}=\frac{A_0((\omega^2-\omega_F^2)-2\mu\omega_F\cdot j)e^{j\omega_F t}}{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}\\&=\frac{A_0((\omega^2-\omega_F^2)-2\mu\omega_F\cdot j)(\cos\omega_F t+j\sin\omega_F t)}{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}\end{aligned}$$

となります。右辺は Cos 関数ですので，実数部だけをとると,

$$x=\frac{A_0((\omega^2-\omega_F^2)\cos\omega_F t+2\mu\omega_F\sin\omega_F t)}{(\omega^2-\omega_F^2)^2+\mu^2\omega_F^2}$$

ここで,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(\omega^2-\omega_F^2)}{\sqrt{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}}\right)^2+\left(\frac{2\mu\omega_F}{\sqrt{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}}\right)^2\\&=\frac{(\omega^2-\omega_F^2)^2}{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}+\frac{4\mu^2\omega_F^2}{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}=1\end{aligned}$$

であることに着目すると,

$$\cos\phi=\frac{(\omega^2-\omega_F^2)}{\sqrt{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}},\quad\sin\phi=\frac{2\mu\omega_F}{\sqrt{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}}$$

となる変数 ϕ を導入して,

$$x=\frac{A_0(\cos\omega_F t\cdot\cos\phi+\sin\omega_F t\cdot\sin\phi)}{\sqrt{(\omega^2-\omega_F^2)^2+4\mu^2\omega_F^2}}$$

と表現することができます。三角関数の加法定理から解は,

$$x = \frac{A_0 \cos(\omega_F - \phi)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_F^2)^2 + 4\mu^2\omega_F^2}}$$

となります。この式を解釈すると，系の振動の各振動数は与えられた強制振動 ω_F と同じ振動数で，位相が ϕ だけずれた振動となることがわかります。また，振幅

$$x_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_F^2)^2 + 4\mu^2\omega_F^2}}$$

は，角振動数で変化します。上式の分母の根号の中は，

$$(\omega^2 - \omega_F^2)^2 + 4\mu^2\omega_F^2 = \omega^4 - 2\omega_F^2\omega^2 + \omega_F^4 + 4\mu^2\omega_F^2$$

これを ω_Fで微分すると，$-4\omega_F\omega^2 + 4\omega_F^3 + 8\mu^2\omega_F = 4\omega_F(-\omega^2 + \omega_F^2 + 2\mu^2)$

すなわち，$\omega_F = 0$,　$\omega_F = \sqrt{\omega^2 - 2\mu^2}$　のとき 0 となり，極小値となります。ただし，$\omega_F = 0$ は振動していないことを示します。なお，

$$\omega_F = \sqrt{\omega^2 - 2\mu^2} \quad \text{あるいは} \quad \left(\frac{\omega_F}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{2\mu^2}{\omega^2}}\right)$$

のとき，振幅が最大値となります。これを**共振角振動数**といいます。この値を振幅の式に代入すると，

$$(x_0)_{\max} = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega^2 - (\omega^2 - 2\mu^2))^2 + 4\mu^2(\omega^2 - 2\mu^2)}} = \frac{A_0}{\sqrt{(2\mu^2)^2 + 4\mu^2\omega^2 - 8\mu^4}}$$

$$= \frac{A_0}{\sqrt{4\mu^2\omega^2 - 4\mu^4}} = \frac{A_0}{2\mu\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}$$

となります。$\omega = 1$　のときの ω_F による振幅の変化をグラフ化すると以下のようになります。