【複素数の指数について考える】

まず， $x = e^{\log x}$ が成り立つので，

$$(a+bj)^{(c+d\,j)} = e^{\log(a+bj)^{(c+d\,j)}} = e^{(c+d\,j)\log(a+bj)}$$

ここで，j は虚数単位である。

$$\log(a+bj) = A + Bj$$

とおけば，$a + bj = e^{A+Bj} = e^A e^{Bj} = e^A(\cos B + j\sin B)$

したがって，$a = e^A \cos B,\quad b = e^A \sin B$ となるので，

$$e^A = \frac{a}{\cos B} \quad \therefore b = a\frac{\sin B}{\cos B} = a\tan B \quad \to B = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$$

一方，

$$e^{2A} = \frac{a^2}{\cos^2 B} = \frac{a^2}{1-\sin^2 B} = \frac{a^2}{1-\left(\dfrac{b}{e^A}\right)^2} = \frac{a^2 e^{2A}}{e^{2A} - b^2}$$

$$\therefore e^{2A} - b^2 = a^2 \quad \to e^{2A} = a^2 + b^2 \quad \therefore A = \frac{\log(a^2+b^2)}{2}$$

すなわち，$\log(a+bj) = \dfrac{\log(a^2+b^2)}{2} + j\cdot\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{b}{a}$

したがって，

$$(c+dj)\log(a+bj) = (c+dj)\left(\frac{\log(a^2+b^2)}{2} + j\cdot\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(\frac{c\log(a^2+b^2)}{2} - d\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right) + j\left(\frac{d\log(a^2+b^2)}{2} + c\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

最初の式 $(a+bj)^{(c+d\,j)} = e^{\log(a+bj)^{(c+d\,j)}} = e^{(c+d\,j)\log(a+bj)}$ に代入して，

$$(a+bj)^{(c+d\,j)} = e^{\left(\frac{c\log(a^2+b^2)}{2} - d\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)+j\left(\frac{d\log(a^2+b^2)}{2}+c\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)}$$

$$= e^{\left(\frac{c\log(a^2+b^2)}{2} - d\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)} e^{j\left(\frac{d\log(a^2+b^2)}{2}+c\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)}$$

ここで，

$$L = \left(\frac{c\log(a^2+b^2)}{2} - d\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$$M = \left(\frac{d\log(a^2+b^2)}{2} + c\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

と置くことによって，

$$(a+bj)^{(c+d\,j)} = e^{L}(\cos M + j\sin M)$$

とすることができる。ちなみに，$b = 0$ のとき，

$$L = c\log a, \quad M = d\log a$$

すなわち

$$(a+bj)^{(c+d\,j)} = a^{(c+d\,j)}$$

$$= e^{c\log a}(\cos(d\log a) + j\sin(d\log a))$$

$$= e^{\log a^c}(\cos(d\log a) + j\sin(d\log a))$$

$$= a^c(\cos(d\log a) + j\sin(d\log a))$$

となる。$d = 0$ のとき，

$$(a+bj)^{(c+d\,j)} = a^c(\cos(d\log a) + j\sin(d\log a)) = a^c$$

である。

一方，$a = 0$ のとき，

$$(a+bj)^{(c+d\,j)} = e^{\log(bj)^{(c+d\,j)}} = e^{(c+d\,j)\log(bj)}$$

ここで，

$$\log(bj) = A + Bj$$

とおくと，

$$bj = e^{A+Bj} = e^{A}(\cos B + j \sin B)$$

ここで，$e^{A} > 0$ だから，$\cos B = 0$ でなければならないので，

$$b > 0 \rightarrow \sin B = 1, \quad b < 0 \rightarrow \sin B = -1$$

としなければならない。これらの正と負の関係から，

$$b = \pm e^{A} \rightarrow A = \log(\pm b) = \log|b|$$

元の式に戻って，

$$(a+bj)^{(c+d\ j)} = e^{\log(bj)^{(c+d\ j)}} = e^{(c+d\ j)\, j \log|b|}$$

$$= e^{-d \log|b| + jc \log|b|} = e^{-d \log|b|}(\cos(c \log|b|) + j \sin(c \log|b|))$$

$$= e^{\log|b|^{-d}}(\cos(c \log|b|) + j \sin(c \log|b|))$$

$$= |b|^{-d}(\cos(c \log|b|) + j \sin(c \log|b|))$$