6.3 全体剛性行列

（1）拡大要素剛性行列　いま，図 6-3 のように要素分割したモデルを考えます。

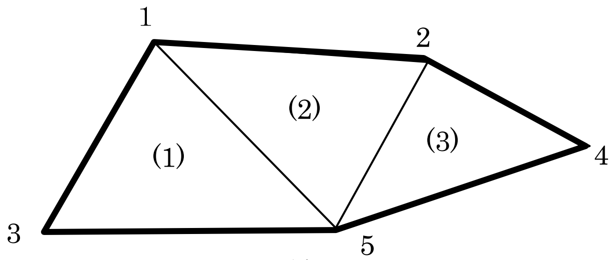

図 6-3 要素の節点番号と剛性行列

図 6-3 の要素(1)は，節点番号 1，3，5 から構成されていますので，要素剛性方程式は，以下のようになります。

$$
\begin{bmatrix}
K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{15}^{(1)} & K_{16}^{(1)} \\
K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{25}^{(1)} & K_{26}^{(1)} \\
K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} \\
K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} \\
K_{51}^{(1)} & K_{52}^{(1)} & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & K_{56}^{(1)} \\
K_{61}^{(1)} & K_{62}^{(1)} & K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{66}^{(1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{x\_1}^{(1)} \\ u_{y\_1}^{(1)} \\ u_{x\_3}^{(1)} \\ u_{y\_3}^{(1)} \\ u_{x\_5}^{(1)} \\ u_{y\_5}^{(1)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_{x\_1}^{(1)} \\ F_{y\_1}^{(1)} \\ F_{x\_3}^{(1)} \\ F_{y\_3}^{(1)} \\ F_{x\_5}^{(1)} \\ F_{y\_5}^{(1)}
\end{bmatrix}
\tag{6.31}
$$

1 次元のときと同様，要素剛性行列を全体の剛性行列に拡大した行列を考えると以下のようになります。

$$
\begin{array}{cc}
\text{節点番号} \longrightarrow & \begin{array}{cccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \end{array} \\
\downarrow \quad x/y & \begin{array}{cccccccccc} x & y & x & y & x & y & x & y & x & y \end{array} \\
\begin{array}{cc}
1 & x \\ & y \\ 2 & x \\ & y \\ 3 & x \\ & y \\ 4 & x \\ & y \\ 5 & x \\ & y
\end{array}
&
\begin{bmatrix}
K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & K_{15}^{(1)} & K_{16}^{(1)} \\
K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 & 0 & K_{25}^{(1)} & K_{26}^{(1)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & 0 & 0 & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} \\
K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & 0 & 0 & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & 0 & 0 & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{51}^{(1)} & K_{52}^{(1)} & 0 & 0 & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & 0 & 0 & K_{55}^{(1)} & K_{56}^{(1)} \\
K_{61}^{(1)} & K_{62}^{(1)} & 0 & 0 & K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & 0 & 0 & K_{65}^{(1)} & K_{66}^{(1)}
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{6.32}
$$

最終的に式(6.38)は，以下のように全体節点変位$[u]$を未知数とする $2\times N$ 元連立 1 次方程式として表現することができます。

$$[K][u]=[F] \tag{6.39}$$

この方程式は，全体剛性方程式そのものです。与えられた境界条件を適用して，この連立方程式を解けば，節点変位を求めることができます。

節点変位が求まると，各要素別の変位分布は式(6.12)から，要素のひずみは式(6.16)から，応力は式(6.18)から求めることができます。

(4) 境界条件　1 次元の場合と同様, 2 次元の場合も力学的境界条件と変位境界条件があります。

力学的境界条件では，対応する節点力を対応する項に入力します。節点に集中荷重が加わる場合も，分布荷重における等価節点力と同じように，集中荷重を値として入力します。

変位境界条件の場合，既知変位を与える等価節点を各節点に加えます。また，1 次元のときと同じように既知の変位が解となるように，対応する対角項を 1，非対角項を 0 として，変位そのものを右辺に設定することで，行列サイズを変更しないようにします。

(5) 節点番号の付け方に関する注意　図 6-13 では，行列内成分を離して表現したかったため，ばらばらに節点番号を付けていますが，実は，規則的に節点番号を付けた方がバンド幅を狭くすることができます。通常，図 6-13 の番号の付け方ではなく，図 6-14 のように番号を付けます。

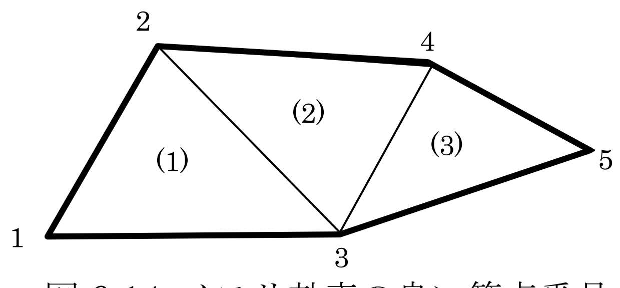

図 6-14 メモリ効率の良い節点番号の付け方

要素内節点番号差の最大値を N_b とすると，バンド幅は $(N_b+1)\times 2$ ですので，図 6-13 のバンド幅は$(4+1)\times 2 = 10$ ですが，図 6-14 におけるバンド幅は $(2+1)\times 2 = 6$ となります。