6.2 要素剛性方程式

仮想仕事の原理は，以下のとおりです（式(5.34)，式(5.37)再掲)。

$$\int_V [\sigma]^T[\delta\varepsilon]dV = \int_S [f]^T[\delta u]dS \tag{6.20}$$

$$\int_V [\varepsilon]^T[D][\delta\varepsilon]dV = \int_S [f]^T[\delta u]dS \tag{6.21}$$

これらを分割された 1 つの三角形要素に適用します。ただし，2 次元の三角形要素に適用しますので，V は三角形の面積に，S は三角形の辺に対応します。式(6.21)の左辺のひずみを式(6.16)の関係を用いて，節点変位で表すと，

$$\int_V [\varepsilon]^T[D][\delta\varepsilon]dV = \int_V ([B][u]^{(e)})^T[D][B][\delta u]^{(e)}dV$$

$$= \int_V ([u]^{(e)})^T[B]^T[D][B][\delta u]^{(e)}\, dV$$

となります。節点変位は，座標の関数でないので積分外に出すことができ，

$$\int_V [\varepsilon]^T[D][\delta\varepsilon]dV = ([u]^{(e)})^T\left(\int_V [B]^T[D][B]dV\right)[\delta u]^{(e)} \tag{6.22}$$

とすることができます。一方，式(6.21)の右辺の変位を節点変位で表すと，

$$\int_S [f]^T[\delta u]dS = \int_S [f]^T[N]^{(e)}[\delta u]^{(e)}\, dS$$

$$= \left(\int_S [f]^T[N]^{(e)}\, dS\right)[\delta u]^{(e)} \tag{6.23}$$

となります。一方，辺上の単位面積当たりに働く力は，

$$[f] = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \rightarrow [f]^T = [f_x, \quad f_y]$$

であり，かつ

$$[N]^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$

ですから，

$$[f]^T[N]^{(e)} = [N_i f_x, \quad N_i f_y, \quad N_j f_x, \quad N_j f_y, \quad N_k f_x, \quad N_k f_x] \tag{6.24}$$