4.3 要素剛性方程式

(1)内力の評価　図 4-3 の要素系における仮想仕事の原理は,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma\,\delta\,\varepsilon\; A\,dx = f_1 \cdot \delta\,u_1 + f_2 \cdot \delta\,u_2 \tag{4.20}$$

となります。式(4.20)の積分の中は，式(4.17)，式(4.19)から,

$$\sigma\,\delta\,\varepsilon = E[B][u][B][\delta\,u] \tag{4.21}$$

とすることができます。行列の積の転置は，転置行列の積になりますので，式(4.21)は以下のように書くことができます。

$$\sigma\,\delta\,\varepsilon = E[u]^T[B]^T[B][\delta\,u]$$

したがって，式(4.20)の左辺は,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma\,\delta\,\varepsilon\; A\,dx = \int_{x_1}^{x_2} E\,[u]^T[B]^T[B][\delta\,u]\,A\,dx \tag{4.22}$$

となります。要素断面積，節点変位，仮想節点変位は，座標 x の関数ではありませんので，これらを積分の外に出すことができます。

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma\,\delta\,\varepsilon\; A\,dx = [u]^T[B]^T[B][\delta\,u]A\int_{x_1}^{x_2} E\,dx \tag{4.23}$$

ヤング率が一定の場合，E も積分の外に出すことができます。一定でなくても要素のサイズが短ければ，ヤング率変化を微小だとみなし，要素内の平均値 $\overline{E}$ で置き換えれば積分外に出すことができます。すなわち，式(4.23)の積分を計算すると,

$$\begin{aligned} &A\int_{x_1}^{x_2} E\;dx \cong A\int_{x_1}^{x_2} \overline{E}\;dx = \overline{E}\;A\int_{x_1}^{x_2} dx \\ &= \overline{E}\;A(x_2 - x_1) = \overline{E}\;A\,l = \overline{E}\,V \end{aligned} \tag{4.24}$$

となります。ここで，V は要素の体積です。すなわち，式(4.20)の左辺は,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma\,\delta\,\varepsilon\; A\,dx = \overline{E}\,V[u]^T[B]^T[B][\delta\,u] \tag{4.25}$$

のように行列の積の形で表現することができます。

一方，新たな行列,