4.2 要素内の変位・ひずみ・応力

(1)変位の近似　1 次元と同様，要素内変位 u を 1 次関数で近似すると，次のような式で表現できます。

$$u(x) = ax + b \tag{4.1}$$

要素の両端で節点変位と等しくなければなりませんから, 以下のように表現することができます。

$$u(x_1) = ax_1 + b = u_1 \tag{4.2}$$
$$u(x_2) = ax_2 + b = u_2 \tag{4.3}$$

したがって

$$a = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \qquad b = \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{x_2 - x_1} \tag{4.4}$$

一方，$l = l_k = x_2 - x_1$ ですから

$$a = \frac{u_2 - u_1}{l}, \qquad b = \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{l} \tag{4.5}$$

となり，式(4.1)は,

$$u(x) = ax + b = \frac{u_2 - u_1}{l} x + \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{l} \tag{4.6}$$

となります。節点変位で整理すると以下の式を得ることができます。

$$u(x) = \frac{x_2 - x}{l} u_1 + \frac{x - x_1}{l} u_2 \tag{4.7}$$

式(4.7)における係数部分,

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{l}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{l} \tag{4.8}$$

を，**形状関数**（shape function）といいます。この関数を使うと式(4.7)を次のように表現できます。

$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \tag{4.9}$$

これをマトリックス表示すると，以下のように表現することができます。

$$u(x) = [N(x)] \cdot [u] \tag{4.10}$$