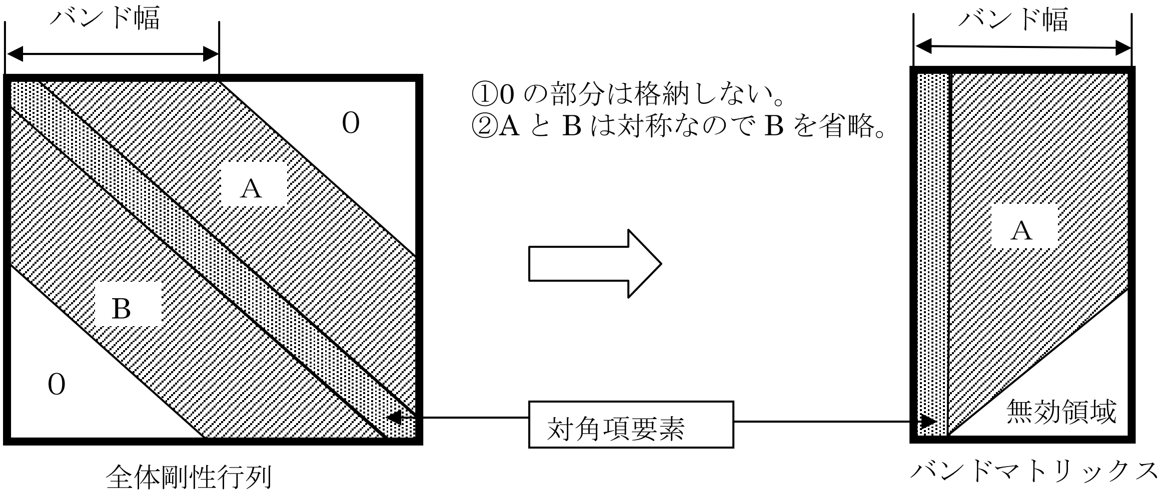
3.3 バンドマトリックスと連立方程式の解法

(1)節点数が多くなると行列が大きくなる　有限要素法では，要素ごとに**要素剛性行列**（後述）を作成し，**全体剛性行列**（後述）に加算します。全体剛性行列を通常の正方行列で表現すると，節点数×自由度の個数の行数と列数の配列が必要となります。平面の有限要素法を考えると，自由度 2（X 方向とY 方向）ですから，節点数 10 の場合，20×20 =400 の配列が必要になります。節点数が 10 倍（節点数=100）に増えると 200×200 =40,000 と 100 倍の配列が必要になります。すなわち，節点数の 2 乗に比例するサイズの配列が必要になります。

(2)剛性行列は実対称行列　一般の工学的問題と同様，剛性行列も**実対称行列**です。したがって，対角要素と半分の非対角要素だけで剛性行列を表現できます。言い換えれば，**上三角行列**分または**下三角行列**分の大きさの配列を用意すればよいことになります。すなわち，N 個の節点がある場合，1 行目の N 個，2 行目の $N-1$ 個，3 行目の $N-2$ 個，・・・，$N-1$ 行目の 2 個，N 行目の 1 個を配列に格納すれば，メモリ量を節約できます。その配列要素数は $1+2+3+\cdots+N=N(N+1)/2$ 個，約半分になります。ただし，まだ節点数の 2 乗に比例しています。

(3)実際の剛性行列は幅を持っている　一般に，節点データを作成する際，ランダムに節点番号を付けるわけではありません。「右から順に」，「下から順に」あるいは「上から順に」などと，何らかの法則性をもった順序付けを行います。このため要素を構成する節点番号を選ぶと，結果的に近接する節点番号になりますので，剛性行列は，対角項を中心に一定の幅をもった範囲（**バンド幅**という）に非ゼロ項が集まり，それ以外は 0 になります。

この性質と上記(2)の対称性を利用して，剛性行列の配列サイズを削減することができます。すなわち，バンド幅内のデータだけを格納することで，必ず 0 になる配列要素を省略します。さらに，非対角要素のうち対称性がある部分の片方だけを格納することにします。その様子を下図に示します。



このようにして格納した配列を**バンドマトリックス**といいます。なお，バンド幅は，要素データ内の節点番号の最大差を N とすると，$(N+1)\times$自由度で求めることができます。ちなみに，2.4 節で生成したメッシュデータを正方行列に格納するには$(226\times2)^2=204{,}304$ 要素が必要となりますが，バンド幅を計算すると 84 となります。したがって，バンドマトリックスで表現すると，格納配列の大きさは，$226\times2\times84=37{,}968$ 要素，すなわち 5 分の 1 以下になります。なお，要素データを構成する接点番号差からバンド幅を算定することができます。そのための関数を List 3-7 に示します。

List 3-7 バンド幅の計算

```
Function setBandWidth() As Integer
  With Worksheets("要素データ")
    i = 2: Nmax = 0                   '要素内節点番号差の最大値を求める
    Do While .Cells(i, 1) <> 0
      P1 = Val(.Cells(i, 2)): P2 = Val(.Cells(i, 3)): P3 = Val(.Cells(i, 4))
      NN = Abs(P1 - P2): If NN > Nmax Then Nmax = NN
      NN = Abs(P2 - P3): If NN > Nmax Then Nmax = NN
      NN = Abs(P3 - P1): If NN > Nmax Then Nmax = NN
      i = i + 1
    Loop
    setBandWidth = (Nmax + 1) * 2   'バンド幅の計算
  End With
End Function
```

【課題 3.2】 List 3.7 で示す関数を利用して，2.4 節で生成したメッシュデータのバンド幅を求めて表示するプログラムを作り，バンド幅が 84 になることを確認しなさい。