3.2 連立方程式の解法

(1)解法の種類　連立方程式の解法には，大きく分類して直接法と間接法があります。間接法は，別名反復法とも呼ばれます。

> **【直接法】**
> ①ガウス（Gauss)の消去法
> ②ガウス・ジョルダン（Gauss-Jordan）法（別名：掃出し法）
> ③LU 分解法
>
> **【間接法】**
> ①ヤコビの反復法（連立変位法）　（ヤコブ法ともいう）
> ②ガウス・ザイデル（Gauss-Seidel）法
> ③SOR 法（Successive Over Relaxation Method： 逐次過緩和法）

本節では，ガウスの消去法とガウスジョルダン法について説明します。その他の方法については，数値解析法等のテキストを参照されたい。

(2)ガウスの消去法

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

ガウスの消去法の処理は，

①前進消去（forward elimination ）

②後退代入（backward substitution）

に分かれます。

■前進消去

以下のように着目する行から非対角項／対角項の係数を乗じたもの差し引くことで，非対角項を順次 0 にし，上三角行列にします。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 8 \\ 12 & 13 & 10 & 16 \\ 18 & 21 & 17 & 27 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

２行目－１行目×２→２行目
３行目－１行目×３→３行目

３行目－２行目×２→３行目

(3)ガウス・ジョルダン(Gauss-Jordan)法

ガウスの消去法では，着目行の下方の行だけを消去しましたが，ガウス・ジョルダン法では，2 行目以降，着目行の上方の行も消去することで対角行列化を行います。その様子を簡単な例で見ていきましょう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 17 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -17 \end{bmatrix}$$

１行目/1
２行目－１行目×２
３行目－１行目
４行目－１行目×３

１行目－２行目×（－１）
２行目／（－１）
３行目－２行目×２×（－１）
４行目－１行目×（－１）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

１行目－３行目×（２／３）
２行目－３行目×（－１／３）
３行目／３
４行目－１行目×（－３／３）

１行目－４行目×（－１／２）
２行目－４行目×０
３行目－４行目×０
４行目／（－２）

■VBA でプログラムを作る

シートの定義やデータの設定部分はガウスの消去法と同じです。ここでは，処理本体部分のみを List 3-5 に示します。

(4)ピボット選択付きのガウスの消去法

連立方程式の行を入替えても，以下のように解は変わりません。

$$\begin{aligned} 5x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 12x_1 + 10x_3 &= 16 \\ 18x_1 + 21x_2 &= 27 \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} 18x_1 + 21x_2 &= 27 \\ 5x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 12x_1 + 10x_3 &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 12 & 0 & 10 \\ 18 & 21 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 27 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 18 & 21 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 12 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

両者とも
同じ連立方程式で
あることに注意