

1.3

仮想仕事の原理

(1)仮想仕事の原理とは 以下のような考え方を**仮想仕事の原理**といい、有限要素法の指導原理となっています。

外力を加えて変形した物体が**釣合い状態**にあるとき、**外力がなす仮想仕事は内力がなす仮想仕事に等しい**。

なお、有限要素法を使った新しい解析手法を検討するのでなければ、この原理についてのイメージをつかむだけでかまいません。

(2)用語 仮想仕事の原理に使われている用語について説明します。

- **内力** 物体内部の面に働いている力。一般に単位面積当りの応力として示しますが、解析する際の**未知量**となります。
- **外力** 物体に外部から働いている力。一般に荷重とも呼ばれます。外力は、解析する際の**既知量**となります。
- **仕事** 力の作用によってある質点が動いた場合、**仕事=力×距離**で与えられます。同様に、外力によって物体が変形した場合、

外力×外力が加わった点の変位

で与えられます。たとえば、外力 F を加えたとき変位 u が生じた場合、外力がなした仕事 W_e は、以下の式で与えられます。

$$W_e = Fu \quad (1.25)$$

一方、応力 σ によってひずみ ε が生じたとすると、**単位体積当りの内力 W_i は応力×ひずみ**によって与えられます。

$$W_i = \sigma\varepsilon \quad (1.26)$$

ここで「単位体積当り」と断っている点に注意してください。単位体積当りですから、「外力がなした仕事と内力がなした仕事が等しい」という関係は、1.2 節(2)で示した丸棒の引張りを例にとると、体積 $V = AL$ として以下のように表現することができます。

$$W_e = Fu = W_i V = \sigma\varepsilon V = \sigma\varepsilon AL \quad (1.27)$$

1.3 仮想仕事の原理

両式を比較するために、Excelシートに以下のように式定義してみます。

	A	B	C	D
1		真の解		
2	x	0.1	0.2	0.3
3	0	$=(\text{EXP}(B\$2*\$A3)-1)/B\$2$	$=(\text{EXP}(C\$2*\$A3)-1)/C\$2$	$=(\text{EXP}(D\$2*\$A3)-1)/D\$2$
4	0.1	$=(\text{EXP}(B\$2*\$A4)-1)/B\$2$	$=(\text{EXP}(C\$2*\$A4)-1)/C\$2$	$=(\text{EXP}(D\$2*\$A4)-1)/D\$2$
5	0.2	$=(\text{EXP}(B\$2*\$A5)-1)/B\$2$	$=(\text{EXP}(C\$2*\$A5)-1)/C\$2$	$=(\text{EXP}(D\$2*\$A5)-1)/D\$2$
6	0.3	$=(\text{EXP}(B\$2*\$A6)-1)/B\$2$	$=(\text{EXP}(C\$2*\$A6)-1)/C\$2$	$=(\text{EXP}(D\$2*\$A6)-1)/D\$2$
7	0.4	$=(\text{EXP}(B\$2*\$A7)-1)/B\$2$	$=(\text{EXP}(C\$2*\$A7)-1)/C\$2$	$=(\text{EXP}(D\$2*\$A7)-1)/D\$2$
8	0.5	$=(\text{EXP}(B\$2*\$A8)-1)/B\$2$	$=(\text{EXP}(C\$2*\$A8)-1)/C\$2$	$=(\text{EXP}(D\$2*\$A8)-1)/D\$2$
		E	F	
		近似解		
	0.1		0.2	
		$=E\$2*\$A\$103*\$A3/(1-\text{EXP}(-E\$2*\$A\$103))$	$=F\$2*\$A\$103*\$A3/(1-\text{EXP}(-F\$2*\$A\$103))$	
		$=E\$2*\$A\$103*\$A4/(1-\text{EXP}(-E\$2*\$A\$103))$	$=F\$2*\$A\$103*\$A4/(1-\text{EXP}(-F\$2*\$A\$103))$	
		$=E\$2*\$A\$103*\$A5/(1-\text{EXP}(-E\$2*\$A\$103))$	$=F\$2*\$A\$103*\$A5/(1-\text{EXP}(-F\$2*\$A\$103))$	
		$=E\$2*\$A\$103*\$A6/(1-\text{EXP}(-E\$2*\$A\$103))$	$=F\$2*\$A\$103*\$A6/(1-\text{EXP}(-F\$2*\$A\$103))$	
		$=E\$2*\$A\$103*\$A7/(1-\text{EXP}(-E\$2*\$A\$103))$	$=F\$2*\$A\$103*\$A7/(1-\text{EXP}(-F\$2*\$A\$103))$	
		$=E\$2*\$A\$103*\$A8/(1-\text{EXP}(-E\$2*\$A\$103))$	$=F\$2*\$A\$103*\$A8/(1-\text{EXP}(-F\$2*\$A\$103))$	
		$=E\$2*\$A\$103*\$A9/(1-\text{EXP}(-E\$2*\$A\$103))$	$=F\$2*\$A\$103*\$A9/(1-\text{EXP}(-F\$2*\$A\$103))$	
			G	
			0.3	
			$=G\$2*\$A\$103*\$A3/(1-\text{EXP}(-G\$2*\$A\$103))$	
			$=G\$2*\$A\$103*\$A4/(1-\text{EXP}(-G\$2*\$A\$103))$	
			$=G\$2*\$A\$103*\$A5/(1-\text{EXP}(-G\$2*\$A\$103))$	
			$=G\$2*\$A\$103*\$A6/(1-\text{EXP}(-G\$2*\$A\$103))$	
			$=G\$2*\$A\$103*\$A7/(1-\text{EXP}(-G\$2*\$A\$103))$	
			$=G\$2*\$A\$103*\$A8/(1-\text{EXP}(-G\$2*\$A\$103))$	
			$=G\$2*\$A\$103*\$A9/(1-\text{EXP}(-G\$2*\$A\$103))$	

なお、A列には x の値を入れます。これを 10 までオートフィルで生成しておきます。したがってセル A103 は x の最大値、すなわち L の値になります。

見通しを良くするためにグラフを生成します。横軸は、 x の値になります。

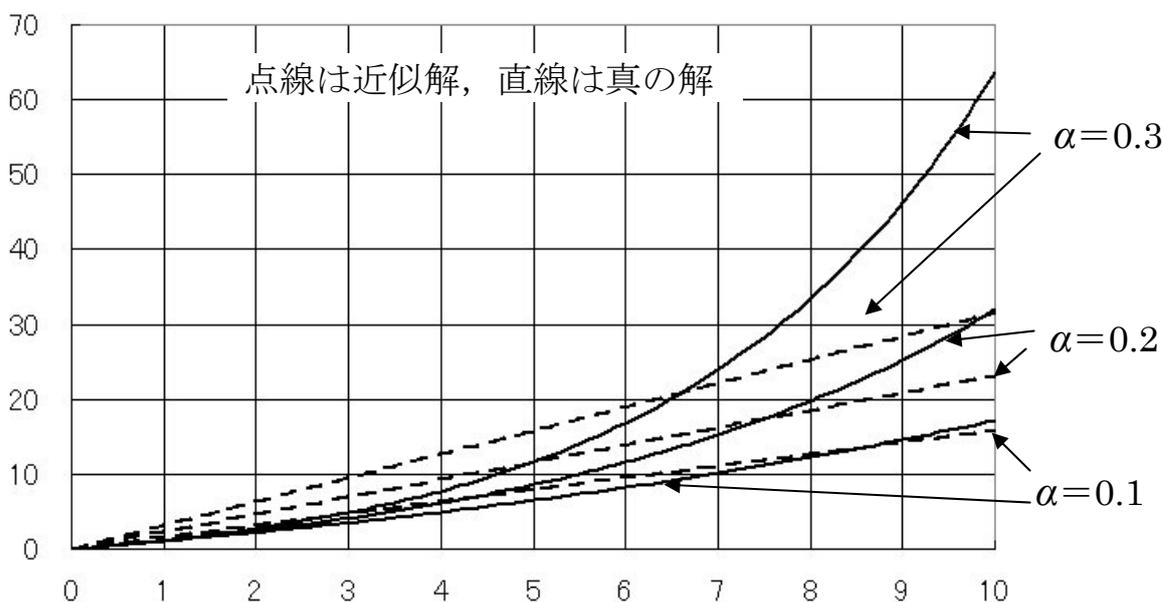


図 1-3 真の解と近似解